# Chapitre 17 :
# Étude asymptotique des suites



**Exercice 1** Ranger par ordre de négligeabilité les suites ci dessous :

$$(\ln n), (\sqrt{n}), (e^n), (n^9), (2^n), (\sqrt[5]{n}), \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right), (n!), \left(\frac{1}{n^3}\right), (\ln^3(n)), (5), (n^3)$$

On pourra utiliser la notation (abusive) $a_n \ll b_n \ll c_n$ pour dire $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$

**Exercice 2** Calculez les limites des suites suivantes, en proposant un équivalent simple, ou, à défaut, en utilisant toute autre technique permettant de conclure :

1. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$.
2. $u_n = \dfrac{4n^4+3n^2+1}{n^2+n^3-2n^4}$.
3. $u_n = \dfrac{2^n}{n^5+3n+1}$.
4. $u_n = \dfrac{2^n+n}{2^n}$.
5. $u_n = (n^4+1)(n^3+2)e^{-n}$.
6. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2-3n+3}$.
7. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}$.
8. $u_n = (n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}$.
9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
10. $u_n = e^n \ln(1+e^{-n^2})$.
11. $u_n = (4n^2-n)\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$
12. $u_n = (n^2-5n+3)\sin\dfrac{1}{n^2+n+1}$
13. $u_n = \left(2n^2-3n+2\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{3}{3n+5}\right)\right)$
14. $u_n = n\ln\left(1+e^{-n}\right)$
15. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
16. $u_n = n-\sqrt{n^2+1}$.
17. $u_n = 2n-\sqrt{4n^2+n+1}$
18. $u_n = n^2\left(\exp\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)-1\right)$
19. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{3n+1}$
20. $u_n = (2n^2-n+1)\left(\sqrt{1+\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}-1\right)$

**Exercice 3** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives.

1. Montrez que si $u_n \sim v_n$ avec $\lim u_n = +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
2. Montrez que si $u_n \sim v_n$ avec $\lim u_n = 0$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
3. Montrez que si $u_n \sim v_n$ avec $\lim u_n = 1$, alors on n'a pas forcément $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$

**Exercice 4** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, et en déduire un réel $a$ tel que $u_n - 1 = \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

**Exercice 5** Soit $k$ un entier naturel fixé. Calculer la limite de $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 6** On se propose de démontrer que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n^n)$, alors que $n!$ n'est pas équivalent à $n^n$ (en effet, la formule de Stirling qui est hors programme, mais que l'on peut montrer grâce aux intégrales de Wallis, donne : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$).

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. a) Montrer que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \, dt$.

   b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de $u_n$, pour tout $n$ supérieur ou égal à 2.
2. Conclure.

**Exercice 7 Partie A : Encadrements préliminaires - Rappels**

1. Soit $f$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

   a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ : $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx$.

   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ : $\displaystyle\int_{1}^{n} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq f(1) + \int_{1}^{n-1} f(x)\, dx$.
2. En appliquant ce résultat à $f(x) = \dfrac{1}{x}$, établir que pour tout $n \geq 2$ :

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

3. En appliquant ce résultat à $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, établir que pour tout $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{2}\ln(2n+1) - \frac{1}{2}\ln(3) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln(2n-1) - \frac{1}{2}\ln(3)$$

**Partie B : Étude d'une suite récurrente**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. On admet que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

1. a) Pour tout entier naturel $k$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de $u_k$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. À l'aide du résultat précédent et de la partie A, montrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(2n-1)}{2}$$

3. En déduire que : $u_n \sim \sqrt{2n}$.

# Chapitre 17 :
# Étude asymptotique des suites



**Exercice 1** Ranger par ordre de négligeabilité les suites ci dessous :

$$(\ln n), (\sqrt{n}), (e^n), (n^9), (2^n), (\sqrt[5]{n}), \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right), (n!), \left(\frac{1}{n^3}\right), (\ln^3(n)), (5), (n^3)$$

On pourra utiliser la notation (abusive) $a_n \ll b_n \ll c_n$ pour dire $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$

**Exercice 2** Calculez les limites des suites suivantes, en proposant un équivalent simple, ou, à défaut, en utilisant toute autre technique permettant de conclure :

1. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$.
2. $u_n = \dfrac{4n^4+3n^2+1}{n^2+n^3-2n^4}$.
3. $u_n = \dfrac{2^n}{n^5+3n+1}$.
4. $u_n = \dfrac{2^n+n}{2^n}$.
5. $u_n = (n^4+1)(n^3+2)e^{-n}$.
6. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2-3n+3}$.
7. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}$.
8. $u_n = (n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}$.
9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
10. $u_n = e^n \ln(1+e^{-n^2})$.
11. $u_n = (4n^2-n)\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$
12. $u_n = (n^2-5n+3)\sin\dfrac{1}{n^2+n+1}$
13. $u_n = \left(2n^2-3n+2\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{3}{3n+5}\right)\right)$
14. $u_n = n\ln\left(1+e^{-n}\right)$
15. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
16. $u_n = n-\sqrt{n^2+1}$.
17. $u_n = 2n-\sqrt{4n^2+n+1}$
18. $u_n = n^2\left(\exp\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)-1\right)$
19. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{3n+1}$
20. $u_n = (2n^2-n+1)\left(\sqrt{1+\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}-1\right)$

**Exercice 3** Soient $u_n$ et $v_n$ deux suites strictement positives.

1. Montrez que si $u_n \sim v_n$ avec $\lim u_n = +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
2. Montrez que si $u_n \sim v_n$ avec $\lim u_n = 0$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
3. Montrez que si $u_n \sim v_n$ avec $\lim u_n = 1$, alors on n'a pas forcément $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$

**Exercice 4** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, et en déduire un réel $a$ tel que $u_n - 1 = \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

**Exercice 5** Soit $k$ un entier naturel fixé. Calculer la limite de $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 6** On se propose de démontrer que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n^n)$, alors que $n!$ n'est pas équivalent à $n^n$ (en effet, la formule de Stirling qui est hors programme, mais que l'on peut montrer grâce aux intégrales de Wallis, donne : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$).

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. a) Montrer que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \, dt$.

   b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de $u_n$, pour tout $n$ supérieur ou égal à 2.
2. Conclure.

**Exercice 7 Partie A : Encadrements préliminaires - Rappels**

1. Soit $f$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

   a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ : $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx$.

   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ : $\displaystyle\int_{1}^{n} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq f(1) + \int_{1}^{n-1} f(x)\, dx$.
2. En appliquant ce résultat à $f(x) = \dfrac{1}{x}$, établir que pour tout $n \geq 2$ :

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

3. En appliquant ce résultat à $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, établir que pour tout $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{2}\ln(2n+1) - \frac{1}{2}\ln(3) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln(2n-1) - \frac{1}{2}\ln(3)$$

**Partie B : Étude d'une suite récurrente**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. On admet que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

1. a) Pour tout entier naturel $k$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de $u_k$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. À l'aide du résultat précédent et de la partie A, montrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(2n-1)}{2}$$

3. En déduire que : $u_n \sim \sqrt{2n}$.